

ESTUDO DO COMPORTAMENTO DE UM SÓLIDO ELÁSTICO-LINEAR TRANSVERSALMENTE ISOTRÓPICO VIA MHA E VIA MEF

Edmar Borges Theóphilo Prado¹ & Adair Roberto Aguiar²

Resumo

Neste trabalho utiliza-se o Método de Homogeneização Assintótica (MHA) no estudo de sólidos contendo múltiplas lâminas planas de materiais elástico-lineares periodicamente distribuídas. Os resultados obtidos deste estudo são comparados com resultados obtidos de simulações numéricas utilizando o Método de Elementos Finitos (MEF). Verificou-se que os resultados obtidos via MEF tendem aos resultados obtidos via MHA quando o número de lâminas no sólido tende ao infinito. Este trabalho representa os primeiros esforços no entendimento do comportamento de laminados não-lineares.

Palavras chaves: Laminados. Elasticidade linear. Método de homogeneização assintótica. Método dos Elementos Finitos.

STUDY OF THE BEHAVIOR OF A TRANSVERSELY ISOTROPIC LINEAR ELASTIC SOLID USING AHM AND FEM

Abstract

In this work the Asymptotic Homogenization Method (AHM) is used in the study of solids containing periodically distributed layers of linearly elastic materials. The results of this study are compared with results of numerical simulations using the Finite Element Method (FEM). The results obtained via FEM tend to results obtained via MHA when the number of layers in the solid tend to infinity. This work represents the first effort in the understanding of the behavior of non-linear laminates.

Keywords: Laminates. Linear elasticity. Asymptotic homogenization method. Finite Element Method.

Linha de Pesquisa: Materiais e Mecânica dos Materiais

1 INTRODUÇÃO

O problema fundamental do Método de Homogeneização Assintótica (MHA) consiste em determinar as propriedades efetivas de um meio heterogêneo a partir das soluções de problemas locais sobre um volume representativo elementar (VRE). Veja, por exemplo, Cioranescu e Donato (1999). Estes problemas locais consistem de sistemas de equações diferenciais parciais com condições de fronteira periódicas e condições de continuidade sobre as interfaces das regiões ocupadas pelos diferentes materiais.

Neste trabalho utiliza-se o MHA para homogeneizar um laminado bifásico contendo uma distribuição periódica de lâminas elásticas, lineares e isotrópicas. Em particular, utiliza-se procedimento descrito em Pobodrya (1984) para calcular parâmetros materiais efetivos do sólido homogeneizado resultante. As etapas principais deste procedimento estão descritas na Seção 2.1.

Na Seção 2.2 emprega-se o Método dos Elementos Finitos (MEF) para discretizar o laminado mencionado acima e na Seção 3 comparam-se resultados obtidos com o MHA, os quais estão

¹ Doutorando em Engenharia de Estruturas - EESC-USP, edmarbt@sc.usp.br

² Professor do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, aguiarar@sc.usp.br



relacionados ao comportamento do sólido homogeneizado, com resultados obtidos com o MEF, os quais estão relacionados ao comportamento do laminado contendo um número elevado de lâminas.

2 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA VIA MHA E VIA MEF

2.1 Formulação do problema via MHA

Considere um cilindro reto ocupando a região $\Omega = (0,5) \times (0,5) \times (1,0) \subset \mathbb{R}^3$. Um ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ é dado pelas coordenadas cartesianas retangulares (x_1, x_2, x_3) . O cilindro é um laminado bifásico contendo uma distribuição periódica de n lâminas elásticas, lineares e isotrópicas e está submetido a um ensaio de tração uniaxial. Na ausência de forças de corpo, o problema correspondente consiste em achar o deslocamento $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ que satisfaça as equações de equilíbrio

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

onde $\operatorname{div} \mathbf{u} = \partial u_i / \partial x_i$ e as constantes de Lamé λ e μ são dadas por

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda^{(1)}, \quad \mu = \mu^{(1)}, & \text{fase 1,} \\ \lambda &= \lambda^{(2)}, \quad \mu = \mu^{(2)}, & \text{fase 2.} \end{aligned} \quad (2)$$

O deslocamento \mathbf{u} satisfaz as condições de contorno

$$\begin{cases} u_i = 0, \quad \sigma_{ij} = 0, \quad j \neq i, & \text{sobre } x_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \\ \sigma_{ij} = 0 & \text{sobre } x_i = 0,5, \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3, \\ \sigma_{3j} = 0, \quad j = 1, 2, \quad \sigma_{33} = \sigma & \text{sobre } x_3 = 1, \end{cases} \quad (3)$$

onde σ é um valor conhecido.

O MHA consiste em expressar a solução $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ das equações (1) a (3) como uma expansão assintótica da forma

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 \mathbf{u}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots, \quad (4)$$

onde $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$ é uma variável local. Mostra-se que $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$, (Pobedrya, 1984).

Substituindo a Eq. (4) nas equações de equilíbrio (1), agrupando termos que multiplicam a mesma potência de ε e igualando os coeficientes resultantes a zero, obtém-se um sistema de equações para a determinação de \mathbf{u}_i , $i=1, 2, \dots$. Para eliminar o comportamento rapidamente oscilante das variáveis que aparecem nestas equações, introduz-se o operador do valor médio, o qual é definido por

$$\langle f \rangle \equiv \frac{1}{|Y|} \int_Y f \, d\mathbf{y}, \quad (5)$$

onde Y é o VRE, $|Y|$ é o volume de Y e $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$.

Aplicando-se o operador definido pela Eq. (5) nas equações obtidas ao se igualar a zero os coeficientes que multiplicam ε^{-1} , obtém-se



$$C_{ijkl}^H \frac{\partial^2 u_{0k}}{\partial x_j \partial x_i} = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad i = 1, 2, 3, \quad (6)$$

onde $\mathbf{u}_0 = (u_{0,1}, u_{0,2}, u_{0,3})$ e C_{ijkl}^H são obtidos das soluções de problemas locais definidos sobre o VRE. Pode-se mostrar que estes coeficientes são as constantes elásticas de um sólido transversalmente isotrópico ocupando a região Ω . Os valores não nulos destas constantes são dados por (Pobedrya, 1984)

$$\begin{aligned} C_{1111}^H = C_{2222}^H &= \langle \lambda + 2\mu \rangle + \langle 1/(\lambda + 2\mu) \rangle^{-1} \langle \lambda/(\lambda + 2\mu) \rangle^2 - \langle \lambda^2/(\lambda + 2\mu) \rangle, \\ C_{3333}^H &= 1/\langle 1/(\lambda + 2\mu) \rangle, \quad C_{1133}^H = C_{2233}^H = \langle \lambda/(\lambda + 2\mu) \rangle / \langle 1/(\lambda + 2\mu) \rangle, \\ C_{1212}^H &= 1/2(C_{1111}^H - C_{1122}^H) = \langle \mu \rangle, \quad C_{1313}^H = C_{2323}^H = 1/\langle \mu \rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

Deseja-se encontrar o deslocamento $\mathbf{u}_0 = (u_{0,1}, u_{0,2}, u_{0,3})$ que satisfaça as equações de equilíbrio (6) juntamente com as condições de contorno

$$\begin{cases} u_{0i} = 0, \quad \sigma_{0ij}^H = 0, \quad j \neq i, & \text{sobre } x_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \\ \sigma_{0ij}^H = 0 & \text{sobre } x_i = 0,5, \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3, \\ \sigma_{03j}^H = 0, \quad j = 1, 2, \quad \sigma_{033}^H = \sigma & \text{sobre } x_3 = 1, \end{cases} \quad (8)$$

onde $\sigma_{0ij}^H = C_{ijkl}^H \frac{\partial u_{0k}}{\partial x_l}$.

A solução do problema homogeneizado (6) e (8) tem a forma

$$u_{0i} = \varepsilon_{ij} x_j, \quad (\text{sem soma sobre } i) \quad (9) \quad \text{onde } \varepsilon_i \text{ é facilmente}$$

determinado das condições de contorno e dado por

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{C_{1133}^H \sigma}{2(C_{1133}^H)^2 - (C_{1122}^H + C_{2222}^H)C_{3333}^H}, \quad \varepsilon_3 = \frac{(C_{1122}^H + C_{2222}^H)\sigma}{-2(C_{1133}^H)^2 - (C_{1122}^H + C_{2222}^H)C_{3333}^H}. \quad (10) \quad \text{Os}$$

resultados obtidos para as tensões e deformações médias em $x_3 = 1$ são apresentados na Figura 2 juntamente com resultados obtidos da solução numérica do problema (1) a (3) utilizando o MEF para um número crescente de lâminas. A obtenção desta solução é descrita a seguir.

2.2 Resolução do problema via MEF

O problema do laminado bifásico contendo n lâminas e correspondendo às equações (1) a (3) foi resolvido via MEF utilizando o pacote computacional Ansys³. Neste trabalho, utilizou-se o elemento finito SOLID187 do Ansys. O SOLID187 é um elemento finito tetraédrico que permite interpolação quadrática dos deslocamentos, sendo adequado para utilização em malhas não uniformes. Este elemento finito é composto por 10 nós e cada nó possui 3 graus de liberdade, correspondendo aos deslocamentos nas direções x_1 , x_2 e x_3 .

Ilustram-se na Figura 1 cilindros de seções transversais retangulares, (Figura 1.a) e circulares (Figura 1.b) contendo diferentes números de lâminas e discretizações utilizando o elemento finito SOLID187. Os números de lâminas e os dados de discretização da Figura 1.a são apresentados na Tabela 1. Os cilindros da Figura 1.b são utilizados para verificar a dependência dos resultados de tensões e deformações com a geometria do sólido.

³ Ansys 5.5 é um software de propriedade da Ansys Inc., PA, USA.



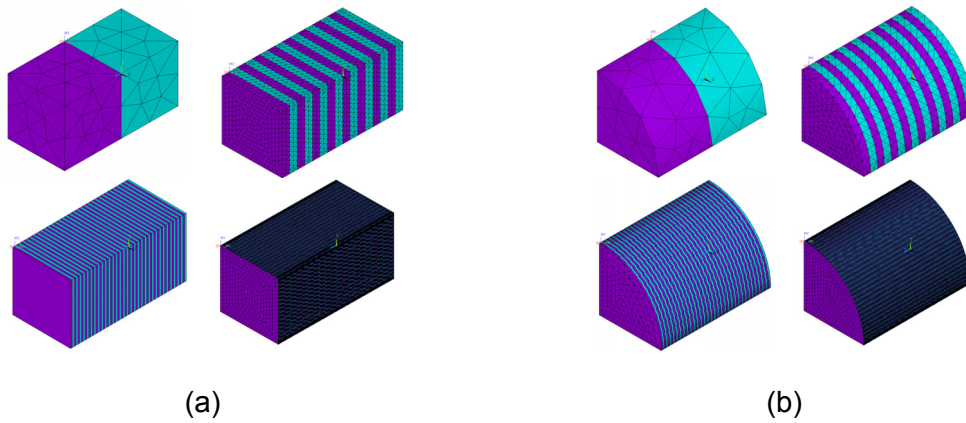


Figura 1 – Cilindros de secção transversal retangular e circular compostos por 2, 16, 64 e 256 lâminas isotrópicas.

Tabela 1 – Malhas empregadas no cilindro de secção transversal retangular

Malha	Número de Lâminas (n)	Número de Elementos	Número de Nós	Número de Graus de Liberdade
1	2	200	425	1275
2	16	40551	59464	178392
3	64	98239	141699	425097
4	256	500733	708492	2125476

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Os valores utilizados para as constantes de Lamé são $\lambda^{(1)} = 31,034 \text{ MPa}$, $\mu^{(1)} = 3,448 \text{ MPa}$ para a fase 1 (elastômero) e $\lambda^{(2)} = 79,007 \text{ GPa}$, $\mu^{(2)} = 152,007 \text{ GPa}$ para a fase 2 (aço). O empilhamento das lâminas na direção x_3 inicia-se com a lâmina da fase 1.

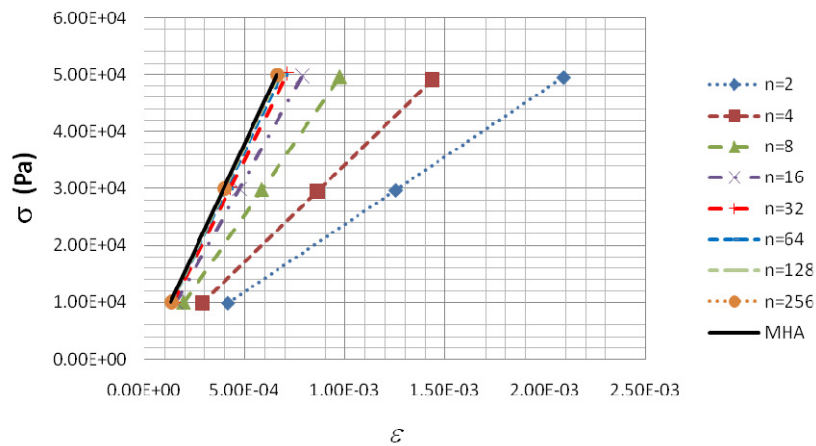


Figura 2 – Curvas tensão (σ) versus deformação (ϵ) em $x_3 = 1$ obtidas via MEF e via MHA para os cilindros de secção transversal retangular.



A Figura 2 apresenta os valores médios de tensão versus deformação obtidos via MEF e via MHA na face $x_3 = 1$. A curva sólida refere-se ao MHA e foi obtida da Eq. (10.b) utilizando $\varepsilon = \varepsilon_3$. As demais curvas referem-se ao MEF. Pode-se observar desta figura que, à medida que o número de lâminas n tende ao infinito, os valores obtidos com o MEF tendem aos valores obtidos com o MHA.

Curvas tensão versus deformação também foram obtidas para o caso dos cilindros com secções transversais circulares mostrados na Figura 1.b. Conforme esperado da teoria, estas curvas são idênticas às curvas mostradas na Figura 2. Isto demonstra que o comportamento global não depende da geometria do sólido elástico linear.

4 CONCLUSÕES

O presente trabalho indica que os valores obtidos para um laminado bifásico via MEF tendem aos valores obtidos para um laminado bifásico homogeneizado via MHA. Este resultado é evidenciado à medida que o número de lâminas no laminado tende ao infinito. Verificou-se também que a geometria do sólido não influencia na determinação das curvas de tensão versus deformação quando o laminado é submetido às mesmas condições de contorno e simetria.

5 AGRADECIMENTOS

Agradecemos à CAPES pelo apoio financeiro, sem o qual esta pesquisa não teria sido possível.

6 REFERÊNCIAS

CIORANESCU, D.; DONATO, P. **An introduction to homogenization**. Oxford University Press, 1999. 224 p. ISBN: 0-19-856553-4. (Oxford Lectures Series in Mathematics and its Applications).

POBEDRYA, B. E. **Mecânica dos Materiais Compostos**. Moscou: Universidade Estatal de Moscou, 1984. 336 p. (Em russo).

